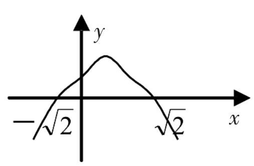
$\cos A-\cos C=-2\sin\frac{A+C}{2}\sin\frac{A-C}{2}=-\sqrt{3}\sin\frac{A-C}{2}=\frac{2m}{m^2-2}$，

即：$\sin\frac{A-C}{2}=-\frac{2m}{\sqrt{3}(m^2-2)}=-\frac{2\sqrt{2}}{m^2-2}$，代入 $\sin^2\frac{A-C}{2}+\cos^2\frac{A-C}{2}=1$.

整理得：$3m^4-16m-12=0$，解出 $m^2=6$，代入 $\cos\frac{A-C}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{m^2-2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

点评：由已知“$A+C=2B$”和“三角形内角和等于 180°”的性质，可得$\begin{cases}A+C=120°,\\B=60°.\end{cases}$由“$A+C=120°$”进行均值换元，则设$\begin{cases}A=60°+\alpha\\C=60°-\alpha\end{cases}$，再代入可求 $\cos\alpha$ 即 $\cos\frac{A-C}{2}$. 本题两种解法由“$A+C=120°$”“$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$”分别进行均值换元，随后结合三角形角的关系与三角公式进行运算，除由已知想到均值换元外，还要求对三角公式的运用相当熟练. 假如未想到进行均值换元，也可由三角运算直接解出：由 $A+C=2B$，得 $A+C=120°$，$B=60°$. 所以 $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}=-2\sqrt{2}$，即 $\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$，和积互化得：

$2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$，即$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\cos(A-C)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\ (2\cos^2\frac{A-C}{2}-1)$，整理得：$4\sqrt{2}\cos^2\frac{A-C}{2}+2\cos\frac{A-C}{2}-3\sqrt{2}=0$，解得：$\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



例 6. 设 $a>0$，求 $f(x)=2a(\sin x+\cos x)-\sin x\cdot\cos x-2a^2$ 的最大值和最小值.

解析：设 $\sin x+\cos x=t$，则$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，由$(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cdot\cos x$ 得：$\sin x\cdot\cos x=\frac{t^2-1}{2}$.

$\therefore\ f(x)=g(t)=-\frac{1}{2}(t-2a)^2+\frac{1}{2}(a>0)$，$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$.

当 $t=-\sqrt{2}$ 时，取最小值：$-2a^2-2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$.

当 $2a\geqslant\sqrt{2}$ 时，$t=\sqrt{2}$，取最大值：$-2a^2+2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$；

当 $0<2a\leqslant\sqrt{2}$ 时，$t=2a$，取最大值：$\frac{1}{2}$.

$\therefore\ f(x)$的最小值为$-2a^2-2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}$，最大值为

$$\begin{cases}\frac{1}{2},(0<a<\frac{\sqrt{2}}{2})\\-2a^2+2\sqrt{2}a-\frac{1}{2}.(a\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2})\end{cases}$$

点评：此题属于局部换元法，设 $\sin x+\cos x=t$ 后，抓住 $\sin x+\cos x$ 与 $\sin x\cdot\cos x$ 的内在联系，将三角函数的值域问题转化为二次函数在闭区间上的值域问题，使得容易求解. 换元过程中一定要注意新的参数的范围（$t\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$）与 $\sin x+\cos x$ 对应，否则将会出错. 本题解法中还包含了含参问题时分类讨论的数学思想方法，即由对称轴与闭区间的位置关系而确定参数分两种情况进行讨论.

一般地，在遇到题目已知和未知中含有 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的和、差、积等而求三角式的最大值和最小值的题型时，即函数为 $f(\sin x\pm\cos x,\ \sin x\cos x)$，经常用到这样设元的换元法，转化为在闭区间上的二次函数或一次函数的研究.

例 7. 设对所于有实数x，不等式$x^2\log_2\frac{4(a+1)}{a}+2x\log_2\frac{2a}{a+1}+\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}>0$恒成立，求$a$的取值范围.

解析：设$\log_2\frac{2a}{a+1}=t$，则$\log_2\frac{4(a+1)}{a}=\log_2\frac{8(a+1)}{2a}=3+\log_2\frac{a+1}{2a}=3-\log_2\frac{a+1}{2a}=3-t$，

$\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}=2\log_2\frac{a+1}{2a}=-2t$，

代入后原不等式简化为 $(3-t)x^2+2tx-2t>0$，它对一切实数 x 恒成立，所以：

$\begin{cases}3-t>0,\\\Delta=4t^2+8t(3-t)<0,\end{cases}$解得$\begin{cases}t<3,\\t<0\text{ 或 }t>6,\end{cases}$ $\therefore\ t<0$ 即 $\log_2\frac{2a}{a+1}<0$，$0<\frac{2a}{a+1}<1$，解得 $0<a<1$.

点评：不等式中$\log_2\frac{4(a+1)}{a}$、$\log_2\frac{2a}{a+1}$、$\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}$ 三项有何联系？进行对数式的有关变形后不难发现，再实施换元法. 应用局部换元法，起到了化繁为简、化难为易的作用. 为什么会想到换元及如何设元，关键是发现已知不等式中$\log_2\frac{4(a+1)}{a}$、$\log_2\frac{2a}{a+1}$、$\log_2\frac{(a+1)^2}{4a^2}$三项之间的联系. 在解决不等式恒成立问题时，使用了“判别式法”. 另外，本题还要求对数运算十分熟练. 一般地，解指数与对数的不等式、方程，有可能使用局部换元法，换元时也可能要对所给的已知条件进行适当变形，发现它们的联系而实施换元，这是我们思考解法时要注意的一点.

例 8. 已知 $\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}$ ……（1），且 $\frac{\cos^2\theta}{x^2}+\frac{\sin^2\theta}{y^2}=\frac{10}{3(x^2+y^2)}$……(2)，求$\frac{x}{y}$的值.

解析：设 $\frac{\sin\theta}{x}=\frac{\cos\theta}{y}=k$，则 $\sin\theta=kx$，$\cos\theta=ky$，且 $\sin^2\theta+$